Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) • Lösbarkeit
Übung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme:

a) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & +3y & = & 5 \\ \text{II)} & 3x & +4y & = & 7 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{3}x & +y & = & 2 \\ \text{II)} & -x & -3y & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{2}x & -2y & = & 1 \\ \text{II)} & -2x & +8y & = & -4 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & -3y & = & 5 \\ \text{II)} & 3x & -\frac{9}{2}y & = & 1 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{4}x & -\frac{1}{5}y & = & 1 \\ \text{II)} & 5x & -4y & = & 20 \end{array}$

2. Stellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem auf, das folgende Lösungsmenge besitzt.

a) $L = \{(1; 2)\}$

b) $L = \emptyset$

c) $L = \{(x; y) | y = 2x + 1\}$

3. Ein lineares Gleichungssystem besitzt die beiden Lösungen $(5; -7)$ und $(3; -3)$.
Berechnen Sie zwei weitere Lösungen des Systems.

4. Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & ax & +by & = & c \\ \text{II)} & dx & +ey & = & f \end{array}$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix, d.h.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = a \cdot e - b \cdot d,$$

einen Wert ungleich Null besitzt. Überprüfen Sie damit, ob folgende Systeme eindeutig lösbar sind. ••∘

a) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 3x & +2y & = & 7 \\ \text{II)} & -2x & +y & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & -3y & = & 4 \\ \text{II)} & -4x & +6y & = & -8 \end{array}$

Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) • Lösbarkeit
Lösung

1.
   a) $L = \{(1; 1)\}$
   b) $L = \emptyset$
   c) $L = \left\{(x; y) \,\middle|\, y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x \wedge x \in \mathbb{R}\right\}$
   d) $L = \emptyset$
   e) $L = \left\{(x; y) \,\middle|\, y = \frac{5}{4}x - 5 \wedge x \in \mathbb{R}\right\}$

2. Hier existieren jeweils beliebig viele Lösungen ein einfaches Beispiel dafür wären:

   a) $\begin{array}{lcccc} \text{I)} & x & +y & = & 3 \\ \text{II)} & x & -y & = & -1 \end{array}$

   b) $\begin{array}{lcccc} \text{I)} & x & +y & = & 1 \\ \text{II)} & 2x & +2y & = & 3 \end{array}$

   c) $\begin{array}{lcccc} \text{I)} & y & = & 2x & +1 \\ \text{II)} & 3y & = & 6x & +3 \end{array}$

3. Da bereits zwei Lösungspaare vorhanden sind, müssen sogar unendlich viele Lösungen bestehen. Die zugehörigen Punkte liegen alle auf einer Geraden. Die Gerade durch $P(5; -7)$ und $Q(3; -3)$ hat die Gleichung $y = -2x + 3$. Die Lösungen des Systems sind damit z.B. auch $R(1; 1)$ oder $S(7; -11)$.

4.
   a) $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 7 \neq 0$, d.h. eindeutig lösbar.

   b) $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3) \cdot (-4) = 0$, folglich nicht eindeutig lösbar.